Título: Resolución de problemas de tipo geométrico en olimpiadas matemáticas

Deiby Castillo[1]; Nathaly Cifuentes[2]; Nathaly Paz[3]; Catalina Rua[4]

Resumen: Esta ponencia presenta un primer avance del proyecto de investigación estudiantil "Resolución de problemas de tipo geométrico en olimpiadas matemáticas" financiado por la vicerrectoría de investigación de la Universidad de Nariño, el cual tiene como objetivo principal recopilar problemas de tipo geométrico presentes en olimpiadas en matemáticas y estudiar distintos métodos de resolución para estos problemas. Se presentan problemas geométricos de diferentes olimpiadas matemáticas y las estrategias empleadas para su solución incluyendo ambientes de geometría dinámica. Los temas y problemas presentados son relevantes para personas interesadas en la resolución de problemas y permitirá dar una visión distinta de lo que representa el verdadero quehacer dentro de la matemática.

Palabras Claves: Resolución de Problemas, geometría, olimpiadas matemáticas, AGD.

Introducción

La Matemática es una de las áreas fundamentales para la formación académica y personal del estudiante, puesto que esta ayuda a desarrollar destrezas y habilidades de pensamiento lógico. Se destaca entre las áreas de la matemática la geometría, que se está estrechamente ligada al diario vivir. Por otra parte, se encuentran las olimpiadas matemáticas que ofrecen problemas cuyo planteamiento y desarrollo no es habitual, en especial los problemas de tipo geométrico, los cuales tiene un gran impacto en la forma en

1 Estudiante Licenciatura en Matemáticas. Universidad de Nariño. Colombia. yodeibycn@gmail.com.
2 Estudiante Licenciatura en Matemáticas. Universidad de Nariño. Colombia. nathalysakura@hotmail.com.
3 Estudiante Licenciatura en Matemáticas. Universidad de Nariño. Colombia. katherinepaz28@yahoo.com.
4 Doctora en Matemática Aplicada. Docente Asistente. Universidad de Nariño. Colombia. cmra03@gmail.com

que los estudiantes y docentes perciben su poder creativo y matemático para dar solución a dichos problemas. Así el quehacer matemático se ve potenciado cuando el estudiante se enfrenta a situaciones problema que crean un conflicto cognitivo en él, lo cual lo estimula a buscar métodos y estrategias de solución para dichos problemas, es por ello que la resolución de problemas es una parte esencial de la actividad matemática. Actualmente la tecnología es un campo destacado, por ello la incorporación del uso de las TIC en la resolución de problemas de tipo geométrico, es un punto clave no solo para visualizar y mejorar el entendimiento por parte de los estudiantes, sino también para hacer del estudio de la geometría y la matemática en general una actividad mucho más atractiva.

Descripción del Problema.

En la actualidad las personas se sorprenden al escuchar que alguien estudia matemáticas, porque suele considerarse como un área de mucha complejidad. Sería interesante ver las matemáticas desde otra perspectiva, una que permita crear conflictos cognitivos en el estudiante al enfrentarse ante un problema, pues es esto lo que lo inspira a buscar uno u otro medio para darle solución. Las matemáticas se subdividen en diferentes áreas, entre ellas la Geometría que estudia la extensión, las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos, figuras, y la manera cómo se miden. La geometría es una parte esencial en el conocimiento matemático, pero en la actualidad se le ha otorgado un papel reducido e insustancial en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Considerando esto surge la inquietud y el afán por una reintegración de dicha área, tal vez en esta ocasión de una manera más creativa y cautivante para los estudiantes y docentes. Por otra parte, teniendo en cuenta que estamos en pleno siglo XXI y la tecnología ocupa un lugar predominante, es necesario que tanto los docentes como los estudiantes integren y reacomoden el entorno educativo a este nuevo potencial y a la adecuada utilización didáctica del mismo. En este contexto, haremos uso de las llamadas TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), y los ambientes de geometría dinámica, para visualizar y mejorar el entendimiento por parte de los estudiantes en la resolución de problemas de tipo geométrico, además del claro interés por hacer el estudio de la geometría una actividad más grata y atrayente para la comunidad en general. Así nos proponemos recolectar problemas de tipo geométrico en olimpiadas matemáticas, puesto que estas son ampliamente conocidas, tanto en la comunidad de matemáticos como en la comunidad en general. Y además este tipo de problemas ha tenido un gran impacto en la transformación de la forma en que los estudiantes y los docentes se perciben a sí mismos frente a su poder creativo y la solidez de su pensamiento matemático al enfrentarse a ellos, ya que dichos problemas son diferentes a los que usualmente estamos acostumbrados a ver y resolver.

Marco teórico.

La matemática es una asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos, los cuales supone un pilar básico en la enseñanza. Entre otros temas, esta ciencia estudia las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. En el pasado las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra). Pero a mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias.

Por otro lado, aprender a pensar matemáticamente es muy importante, requiere no solo el tener una gran cantidad de conocimientos, sino que además se necesita de flexibilidad y dominio de dichos conocimientos y del uso efectivo de los recursos cognitivos propios para comprender y aceptar reglas.

Así un aspecto importante en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es el desarrollo de estrategias, métodos, recursos y una amplia disposición para hacer parte de tareas y actividades que evidencien el quehacer matemático.

Las matemáticas se usan en todo el mundo como una herramienta esencial en muchos campos, entre los que se encuentran las ciencias naturales, la ingeniería, la medicina y las ciencias sociales.

La matemática se subdivide en diferentes ramas, como la aritmética, el álgebra, el cálculo, la probabilidad, la estadística, la geometría, entre otras. De estas se quiere destacar la geometría que es la rama de la matemática, que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, politopos (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.).

La geometría es una de las ciencias más antiguas. Inicialmente está constituida por un conjunto de conocimientos prácticos en la relación con las longitudes, áreas y volúmenes. Los orígenes de la geometría se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas. En la civilización babilónica se incorporó el estudio de la geometría con la invención de la rueda, la cual se abrió el camino al estudio de la circunferencia, que conllevaría posteriormente al descubrimiento del número pi. Por otro lado, los griegos implantaron los problemas de construcción, en los cuales cierta línea o figura debe ser construida utilizando sólo una regla de borde recto y un compás. Ejemplos de estos problemas fue la construcción de una línea recta dos veces más larga que una recta dada, o la bisección de un ángulo dado. Tres famosos problemas de construcción que corresponden a la época griega: la duplicación del cubo (construir un cubo de volumen doble al de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con área igual a un círculo determinado) y la trisección del ángulo (dividir un ángulo dado en tres partes iguales). Y en el Antiguo Egipto la geometría estaba muy avanzada, ellos calculaban correctamente superficies de cuadriláteros, triángulos y tenían una buena aproximación al área del círculo.

Por otra parte, la matemática cuenta con problemas de tipo algebraico, aritmético, geométrico, entre otros, los que nos interesan son los problemas de tipo geométrico, los cuales trabajan con diversos contenidos y conceptos (formas, figuras, orientación, visión espacial, etc.). Los problemas geométricos pueden clasificarse en dos: los ejercicios (situaciones de tipo 1) y los verdaderos problemas (situaciones de tipo 2).

Las situaciones de tipo 1 son el tipo de situaciones para las cuales el repertorio o los recursos necesarios para su resolución hacen parte del conocimiento del estudiante. En estos casos el comportamiento de los estudiantes tiende a ser predecible y mecánico, es básicamente un esquema organizado y único. Es por eso que las situaciones de tipo 1 más que un problema son un ejercicio.

Las situaciones de tipo 2, son la clase de situaciones para las cuales el estudiante no posee de todas las competencias necesarias para su resolución. Esto lleva al estudiante a entrar en un proceso de reflexión, exploración, ensayo y error. En estos casos los estudiantes tienden a hacer uso de sus esquemas cognitivos intentando adaptarlos a la situación, en pro de hallar la solución. Estas situaciones representan los verdaderos problemas. Los problemas de tipo geométrico presentes en olimpiadas matemáticas, hacen parte de este tipo de situaciones.

Las Olimpiadas Matemáticas son competiciones de resolución de problemas de matemáticas e ingenio para estudiantes de distintos niveles educativos. Las Olimpiadas han llegado a tomar diferentes formas, desde pruebas de selección múltiple hasta pruebas de tipo investigativo de varias semanas de duración, compuestas por tareas que colindan o conllevan a problemas abiertos.

Independientemente de la forma y envergadura que puedan tener los problemas, la matemática es lo suficientemente amplia y elástica que permite proponer problemas que desarrollan la capacidad del estudiante hacia la superación personal en matemáticas.

Las habilidades que una persona requiere para resolver con éxito un problema son variadas y dependen del tipo de problema a resolver, estas involucran procesos de reflexión, de ensayo y error, de conjetura, de búsqueda de patrones, de razonamiento, inducción y deducción, entre otras.

Durante mucho tiempo se ha considerado la resolución de problemas como una parte esencial de la enseñanza de las matemáticas. Polya en el libro "Cómo plantear y resolver problemas", establece cuatro fases a seguir para enfrentarse a un problema: la primera, es comprender el problema, es decir, que el alumno tiene que interiorizar el problema en su totalidad, pues no tiene sentido solucionar un problema que no se entiende; la segunda, es la concepción de un plan, que es una de las fases más importantes para solucionar un problema, debido a que salen a relucir nuestros conocimientos ya adquiridos, buenos habito de pensamiento, concentración y buena suerte y además creamos un posible camino a seguir para resolver dicho problema; la tercera es la ejecución de un plan, donde el estudiante debe tener claridad y seguridad en cada paso que da y la cuarta, la visión retrospectiva, consiste en revisar la solución del problema y ahondar en los detalles que se puedan mejorar para así lograr una mayor comprensión del mismo y mejorar su solución.

Hoy día la resolución de problemas no aparece aislada en el currículo, sino integrada en las distintas áreas de las matemáticas. Desde la perspectiva de la educación matemática, la incorporación de las TIC ofrece un impulso para ampliar y mejorar las estrategias heurísticas en la resolución de problemas.

Las TIC nos permiten abordar una situación matemática desde distintas formas de representación casi de manera simultánea, esto es algo que con lápiz y papel es prácticamente imposible de lograr. Además, las TIC y los AGD constituyen una gran ventaja al momento de observar propiedades, relaciones y variaciones de las mismas por medio de la manipulación e interacción directa con las representaciones de los objetos matemáticos. Un ejemplo viene dado por las posibilidades que brindan los ambientes de geometría dinámica, ya que la herramienta de arrastre posibilita la formulación y verificación de conjeturas o la construcción de contraejemplos que permiten el rechazo o la modificación de las mismas.

En un problema, como ocurre con las matemáticas y las ciencias en general, podemos distinguir dos momentos que son, el de exploración/descubrimiento, y el de la justificación/validación (Piaget). En el primer momento, se utiliza todas aquellas estrategias heurísticas de las que dispone para la elaboración de una conjetura, que es una afirmación que le parece loable, y que puede ser aceptada o rechazada, en este último caso puede proceder a modificarla. En el segundo momento, se intenta buscar y dar argumentos para un razonamiento que la certifique. En relación a la clasificación de problemas de Polya (1965) si el momento preponderante es el de justificación, estaríamos ante "un problema por demostrar"; cuando está presente el momento de exploración, estamos ante un "problema por resolver".

La experiencia escolar que se ha venido impartiendo en nuestras escuelas casi siempre sofoca la creatividad del estudiante y destruye su confianza en sus propias posibilidades de resolver problemas singulares, la experiencia de participar en una competencia olímpica bien diseñada puede reanimar su interés en matemáticas, reencender su curiosidad intelectual frente a ella y su confianza en sus propios medios para dominar problemas. La participación en competencias inspira en muchos estudiantes un interés creciente en la matemática e incrementa el deseo que tienen para aprender más matemáticas.

Objetivos.

Objetivo General: Recopilar problemas de tipo geométrico presentes en olimpiadas en matemáticas y estudiar distintos métodos de resolución para estos problemas.

Objetivos Específicos

- Aplicar el conocimiento adquirido sobre software de geometría dinámica como una estrategia en la resolución de problemas de tipo geométrico presentes en olimpiadas matemáticas.
- Aprender nuevas estrategias y técnicas de resolución de problemas que complementaran nuestra formación docente, las cuales se aplicaran en distintos problemas de tipo geométrico presentes en olimpiadas matemáticas.
- Divulgar la información recolectada en esta investigación, en al menos una de las revistas de la facultad.
- Participar en eventos académicos en los que se pueda discutir sobre esta temática.

Metodología.

En esta investigación se proponen las siguientes etapas para la ejecución del proyecto: Primera etapa: Se realiza una revisión bibliográfica, con el fin de obtener la información suficiente para el desarrollo del proyecto, la cual se realizará de manera constante y según las necesidades que se presenten. En esta etapa se investigará sobre las olimpiadas matemáticas tanto nacionales como internacionales que se encuentren disponibles de forma online y además se entrará en contacto con las instituciones que las han organizado para intentar disponer de mayor material. Además, nos enfocaremos en textos de resolución de problemas para estudiar técnicas en estos descritos tales como libros de G. Polya, libros relacionados con resolución de problemas e incluso textos sobre TICs. Segunda etapa: Se recolectan los problemas de olimpiadas matemáticas y se seleccionan solo aquellos que sean de tipo geométrico. Tercera etapa: Se resuelven los problemas seleccionados, utilizando el método de Polya que describe cuatro pasos: el primero es entender el problema, el segundo es idear un plan, el tercero es ejecutar el plan y el cuarto es hacer una mirada retrospectiva. Cuarta etapa: Determinar algunos de los diferentes caminos y estrategias que se pueden aplicar a la hora de resolver un problema e integrar las TIC con el uso de AGD, si es posible. Quinta etapa: Socializar los resultados obtenidos con personas expertas en el tema, participar en seminarios en la universidad y en eventos académicos relacionados con esta área. Sexta etapa: En esta última etapa, se realizará la recopilación de toda la información obtenida en el informe final del proyecto y se publicará un artículo, con los resultados encontrados durante esta investigación, en una de las revistas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nariño.

Resultados.

A continuación presentamos algunos de los problemas recolectados a lo largo de la investigación y sus soluciones, basadas en las cuatro fases a seguir para enfrentarse a un problema, que plantea Polya en el libro "Cómo plantear y resolver problemas" que son:

1. Comprender el problema, es decir, que el alumno tiene que interiorizar el problema en su totalidad, pues no tiene sentido solucionar un problema que no se entiende.

2. La concepción de un plan, que es una de las fases más importantes para solucionar un problema, debido a que salen a relucir nuestros conocimientos ya adquiridos, buenos habito de pensamiento, concentración y buena suerte y además creamos un posible camino a seguir para resolver dicho problema.

3. La ejecución de un plan, donde el estudiante debe tener claridad y seguridad en cada paso.

4. La visión retrospectiva, consiste en revisar la solución del problema y ahondar en los detalles que se puedan mejorar para lograr una mayor comprensión del mismo y mejorar su solución.

Además se presentan algunas preguntas orientadoras con el fin de guiar al estudiante en la búsqueda de la solución.

Posteriormente se proponen algunos problemas de los cuales no se expone la solución, con el fin de motivar a los estudiantes a poner en práctica los cuatro pasos propuestos por Polya para abordar de manera exitosa el problema y obtener el resultado deseado, es decir, llegar a la solución de dichos problemas.

Problemas Resueltos.

- ***Tomado de Olimpiadas de Puerto Rico, año 2010.***

Dibuja un triángulo ABC que tenga el ángulo $A=30^{\circ}$ y el ángulo $B=70^{\circ}$, sobre la prolongación del lado AC marca el punto D de manera que $CD=CB$ completa el triángulo DCB.

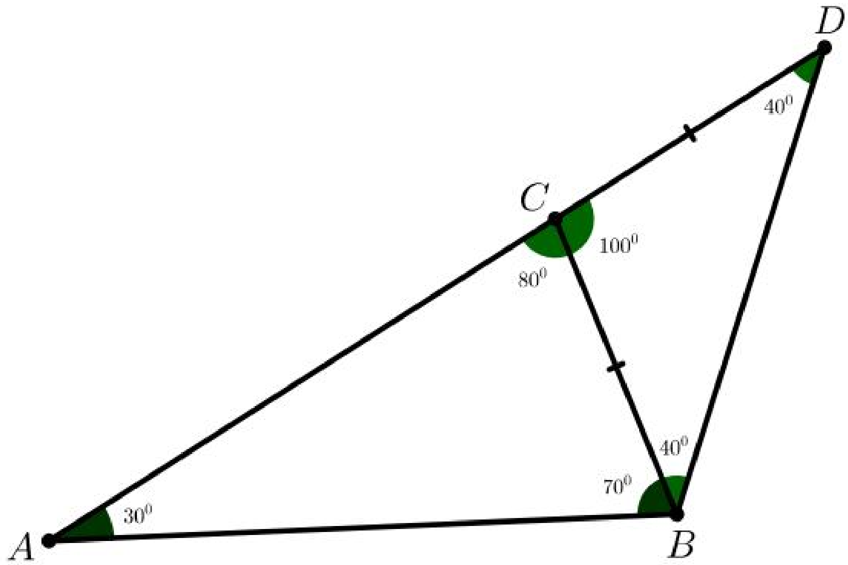
¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

***Preguntas orientadoras*.**

- ✓ ¿Cuál es la incógnita?
- ✓ ¿Cuáles son los datos?
- ✓ ¿Cuánto suman los ángulos internos de un triángulo?
- ✓ ¿Cuánto mide un ángulo llano?
- ✓ ¿Qué propiedad cumplen los ángulos de la base de un triángulo isósceles?

***Solución*.**

El primer paso es realizar la gráfica, que se presenta a continuación:



Como se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a *180*◦, por lo tanto $\angle$ *ACB=80*◦, además como $\angle$ *CAD* es llano, entonces $\angle$ *BCD=100*◦.

Por otra parte, como Δ *BCD* es un triángulo isósceles entonces, $\angle$ *CBD* y $\angle$ *BDC* son congruentes, así $\angle$ *CBD* = $\angle$ *BDC* = *40*◦.

- ***Tomado de UIS, año 2010.***

Las longitudes de los lados del triángulo PQR son: PQ = 2, QR = 3, RP = 4 las bisectrices de los ángulos P y Q se intersectan en el punto I. ¿Cuál es la razón entre en área del triángulo PIQ y PQR?.

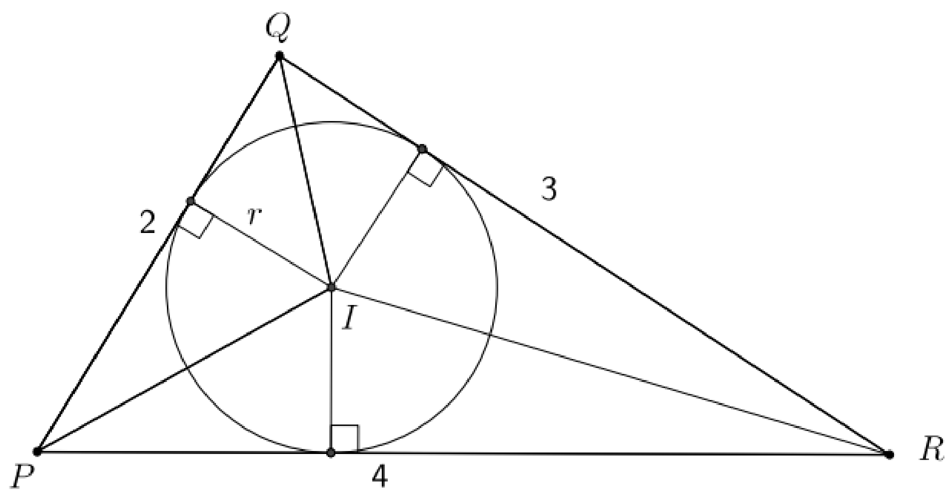
Preguntas orientadoras.

- ✓ ¿Cuál es la incógnita?
- ✓ ¿Cuáles son los datos?
- ✓ ¿Se puede realizar una gráfica?
- ✓ ¿Qué propiedades cumple I?

- ✓ ¿Qué pasa si se inscribe una circunferencia en ΔPQR con centro en I?
- ✓ ¿Con ayuda de la circunferencia se puede obtener el área del ΔP QR?

Solución.

El punto I de intersección de las bisectrices es el incentro del ΔPQR y por lo tanto se puede inscribir una circunferencia, como muestra a gráfica:



Denotemos por r el radio de la circunferencia, ahora con ayuda de esta podemos obtener el área del ΔP QR, como sigue:

$$A_{PQR} = A_{PRI} + A_{RIQ} + A_{QIP}$$

$$= \frac{4r}{2} + \frac{3r}{2} + \frac{2r}{2}$$

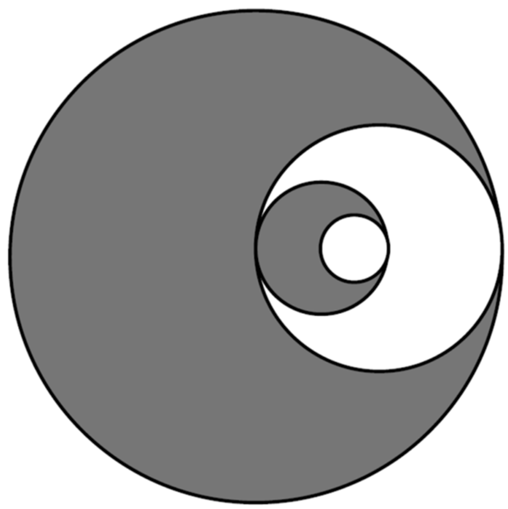
$$= \frac{9r}{2}$$

Así la razón entre los triángulos pedidos es:

$$\frac{A_{PQR}}{A_{PIQ}} = \frac{r}{\frac{9r}{2}} = \frac{2}{9}$$

- ***Tomado de Olimpiadas de Puerto Rico, año 2010.***

Si el radio del círculo más grande es 4 y cada círculo tangente interior tiene radio 1 4 del anterior. ¿Cuánto vale el área sombreada?



Preguntas orientadoras

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un círculo?

Solución.

La fórmula para calcular el área de un círculo es: $\boldsymbol{A = \pi r^2}$ Si denotamos los círculos como a, b, c y d en orden descendente y sabiendo que los radios son 4, 1, 1/4 y 1/8 respectivamente, el área a calcular sería:

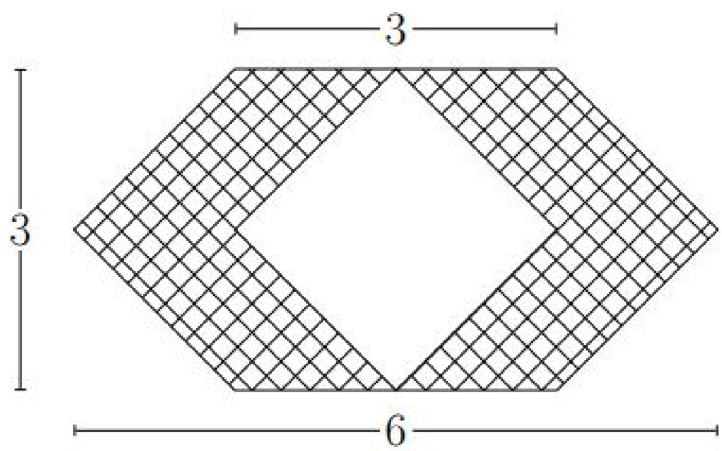
$$A_a - A_b + A_c - A_d = \pi * 4^2 - \pi * 1^2 + \pi * \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \pi * \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$= 16\pi - \pi + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{64}$$

$$= \frac{964}{64}\pi$$

- ***Tomado del Canguro Matemático, año 2008.***

¿Cuánto vale el área sombreada?

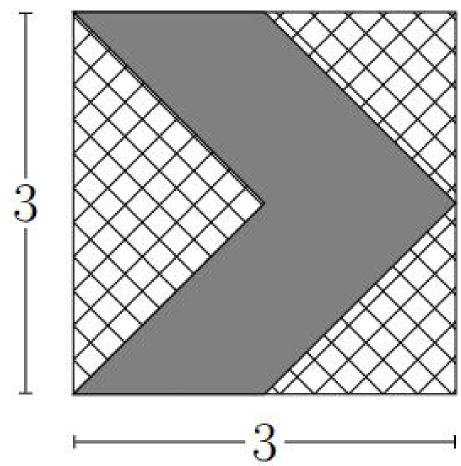


Preguntas Orientadoras.

- ✓ ¿Cuáles son los datos?
- ✓ ¿Cuál es la incógnita?
- ✓ ¿Es posible fraccionar la figura?
- ✓ ¿Se puede trasladar alguna parte de la figura para formar una conocida, en la cual sea más fácil calcular el área?

Solución.

Se fracciona y se traslada la figura como se muestra en la imagen.



Así el área de la figura inicial es igual al área del cuadrado de lado 3 la cuál es $3 * 3 = 9$.

Problemas Propuestos.

- ***Tomado del Canguro Matemático, año 2008***.

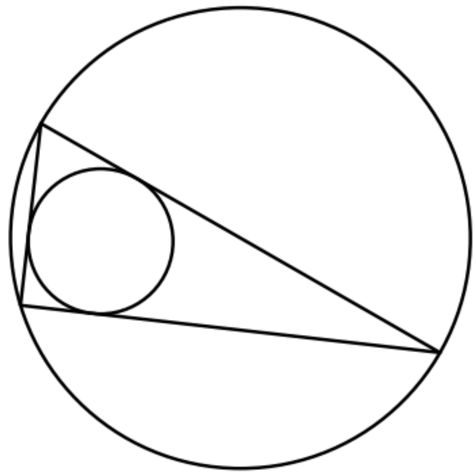
  Dos círculos de radios 4 y 6 se cortan. La diferencia de las áreas de las partes que no se superponen es?

- ***Olimpiadas Puerto Rico, año 2002.***

  Inscriba un círculo dentro de un triángulo equilátero de lado 1. Ahora inscriba tres círculos en las esquinas del triángulo, que sean tangentes al círculo inscrito original y a dos lados consecutivos del triángulo. ¿Cuál es el radio de los tres pequeños círculos?

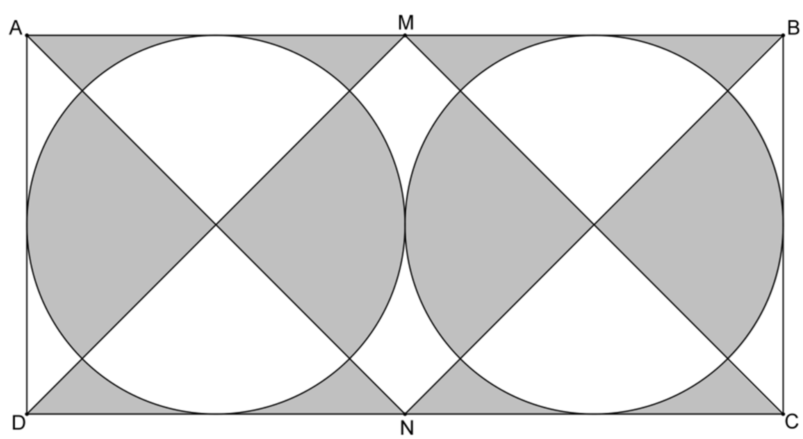
- ***Tomado del Canguro Matemático, año 2005.***

Sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo. Si d es el diámetro de la circunferencia inscrita y D el diámetro de la circunferencia circunscrita a este triángulo. ¿Cuánto vale D + d?



- ***Tomado del Canguro Matemático, año 2016.***

  ABCD es un rectángulo y M y N son los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Las circunferencias son tangentes a los lados del rectángulo y tangentes entre sí. Si AB es 10cm, ¿el área de la región gris es?



Conclusiones.

- Para el desarrollo de los problemas que se presentan en olimpiadas matemáticas, es necesario que los estudiantes tengan conocimientos geométricos previos.

- Los tipos de problemas geométricos más comunes tratan sobre: hallar el área, encontrar el perímetro, encontrar ángulos.

- Los problemas que a nuestro criterio son de tipo geométrico, no necesariamente tienen una solución netamente geométrica.

- En los problemas de tipo geométrico las gráficas juegan un papel muy importante, pues estas ayudan al estudiante a obtener una mejor comprensión del problema, pero no siempre deben representar exactamente las condiciones del enunciado.

- En las diferentes Olimpiadas Matemáticas, que se han estudiado, se observa que los problemas de tipo geométrico ocupan un lugar representativo en los diferentes niveles de las pruebas.

- El trabajo a futuro en la investigación es buscar estrategias que permitan solucionar los diferentes tipos de problemas geométricos presentes en olimpiadas matemáticas, integrando software computacional como Cabri II Plus y GeoGebra.

Bibliografía

G. Polya. (1979). Cómo plantear y resolver problemas. México. Editorial Trillas, S.A. de C.V.

Schoenfeld, A. (1996). Research in collegiate mathematics education. CBMS Issues in Mathematics Education, 6. Washington DC. American Mathematical Society Providence RI in cooperation with Mathematical Association of America.

ZEITZ, P. (1999). The art and craft of problem solving. New York. John Wiley & Sons, Inc.

Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la UIS, en: http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas.

Canguro Matemático, en: http://www.canguromat.org.es.

Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico, en: http://www.ompr.pr.